

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

1-дәріс. II ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді классификациялау және канондық түрге келтіру.

Дәрістің мақсаты – II ретті екі айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді таныстыру, оларды классификациялау және канондық түрге келтіру

Негізгі сұрақтар:

1. II ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі
2. II ретті айнымалы коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі
3. II ретті айнымалы коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің типін анықтау
4. II ретті айнымалы коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді канондық түрге келтіру

1 Тарихи шолу

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің тарихы XVIII ғасырда Ньютон механикасының және есептеу математикасының дамуына тікелей байланысты. 1747 жылы француз математигі **Жан Лерон Д'Аламбер** созылмалы ішектің тербелісін сипаттайтын теңдеуді қорытып шығарды:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

Д'Аламбердің идеясын дамыта отырып, **Леонард Эйлер** бірнеше айнымалы функцияларға арналған II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеді. Ол серпімді тақтаның тербелісін сипаттайтын теңдеулерді шығарды және шешу әдістерін ұсынды. Эйлер алғаш рет *жоғары ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер* ұғымын енгізді және шекаралық шарттардың физикалық маңызын түсіндірді. 1822 жылы **Жан-Батист Жозеф Фурье** өзінің еңбегінде

$$u_t = k u_{xx}$$

теңдеуін ұсынды, ол *жылыұткізгіштік теңдеуі* деп аталды. Фурье осы теңдеуді шешу үшін *тригонометриялық қатарларды* қолданды. Бұл әдіс кейіннен **Фурье қатары** деп аталып, бүкіл функционалдық талдаудың негізін қалады. Фурьенің еңбегі математикалық физика теңдеулерін шешудің жаңа дәуірін ашты. Осы кезеңде **Пьер-Симон Лаплас** гравитациялық және электростатикалық өрістерді зерттей отырып, келесі теңдеуді енгізді:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

яғни *Лаплас теңдеуін* тұжырымдаған еді. Бұл теңдеу кеңістіктегі тепе-теңдік күйдегі құбылыстарды сипаттайды және *эллиптикалық типтегі* II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің негізгі үлгісі болып табылады. Кейінірек осы теңдеудің жалпылауы – **Пуассон теңдеуі** пайда болды:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z).$$

Ал, XIX ғасырда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясы толық математикалық негізге ие бола бастады. **Бернхард Риман** гиперболалық типтегі теңдеулердің қасиеттерін зерттеді және *Риман функциясын* енгізді. Ол алғашқы болып толқындық теңдеудің интегралдық түрдегі шешімін жазды. Норвегиялық математик **Софус Ли** II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешудің симметриялық түрлендіру әдістерін жасады. Оның *топтар теориясы* кейін көптеген аналитикалық шешу әдістерінің негізіне айналды. XIX ғасырдың аяғында **Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле**, **Карл Готфрид Нейман**, **Жюль Анри Пуанкаре** және басқа ғалымдар эллиптикалық және параболалық теңдеулерге арналған *шекаралық есептерді* қарастырды. Бұл зерттеулер қазіргі функционалдық талдаудың (**Давид Гильберт** және **Стефан Банах** кеңістіктері теориясының) дамуына жол ашты. XX ғасырда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу **сандар әдістері**, **функционалдық талдау** және **операторлық теориямен** тығыз байланысты дамыды. 1930–1940 жылдары **С.Л. Соболев** дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер шешімдерін кең мағынада қарастыру идеясын ұсынды және *Соболев кеңістіктерін* енгізді. Бұл ұғым қазіргі заманғы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі іргетасы болып табылады. Есептеу техникасының дамуы (XX ғасырдың ортасы) сандық әдістердің пайда болуына себеп болды. Айырымдық сұлба және ақырлы элементтер әдістері көптеген инженерлік есептерді шешуге мүмкіндік берді.

Қазіргі таңда II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер тек физика мен механикада ғана емес, сонымен қатар:

- биологияда (популяциялар динамикасы),

- экономикада (диффузиялық үлгілер),
- жасанды интеллектте (нейрондық ДТДТ модельдері)

сияқты салаларда кеңінен қолданылады. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер математикалық физика мен инженерияның негізгі заңдарын сипаттауда маңызды рөл атқарады. Көптеген физикалық процестер (жылуөткізгіштік, толқын таралуы, серпімділік, электростатикалық өрістер және т.б.) 2-ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады.

Бұл дәрісте біз екі немесе бірнеше айнымалыдан тәуелді II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрін, олардың классификациясын және канондық түрге келтіру әдістерін қарастырамыз.

2 II ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі

Екінші ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеу (ДТДТ) келесі түрде жазылады:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)u = f(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

мұндағы

- $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — белгісіз функция;
- $a_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, $b_i(x_1, \dots, x_n)$, $c(x_1, \dots, x_n)$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — белгілі функциялар;
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ — екінші ретті аралас туындылар.
- $a_{ij} = a_{ji}$, яғни $\{a_{ij}\}$ матрицасы симметриялы болып табылады.

Ал (x, y) айнымалыларынан тәуелді $u(x, y)$ функциясы үшін II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі келесідей жазылады:

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y, u) = 0, \quad (2.2)$$

мұндағы $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_y, u_x$ — ізделінді $u(x, y)$ функциясының екінші және бірінші ретті дербес туындылары, ал A, B, C, D, E, F — берілген функциялар болып табылады. II ретті екі айнымалы дербес

туындылы дифференциалдық теңдеулерге мысал ретінде осы пәнді жүргізу барысында қарастырылатын төмендегі келтірілген негізгі үш теңдеуді айтуға болады

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\text{Лаплас теңдеуі}),$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (\text{Толқын теңдеуі}),$$

$$u_t - k u_{xx} = 0 \quad (\text{Жылуөткізгіштік теңдеуі}).$$

Бұл теңдеулер — өз кезегінде қандай да бір физикалық құбылыстарды сипаттайтын алдағы уақытта баса айтатын боламыз. (2.2) теңдеудің қасиеттері көбіне екінші ретті туындылардың алдында A, B, C тұрған коэффициенттері арқылы анықталады. Ол үшін төмендегі квадраттық формаға назар аударайық:

$$A \xi^2 + 2B \xi \eta + C \eta^2 = 0.$$

Соңғы өрнек арқылы (2.2) теңдеудің типін анықтауға болады. Олай болса, Δ дискриминант деп аталатын келесі шаманы енгізейік:

$$\Delta = B^2 - AC.$$

Бұл Δ шамасының оң немесе теріс анықталуына байланысты теңдеуді үш түрлі типке бөлуге болады:

1. **Эллиптикалық тип:** $\Delta < 0$. Мысалы, Лаплас теңдеуі $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
2. **Параболалық тип:** $\Delta = 0$. Мысалы, жылуөткізгіштік теңдеуі $u_t - k u_{xx} = 0$.
3. **Гиперболалық тип:** $\Delta > 0$. Мысалы, толқын теңдеуі $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$.

Жоғарыдағы классификация II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің қасиетін, олардың шешімдерінің табиғатта таралу жылдамдықтарын және шекаралық шарттарын анықтауда шешуші рөл атқарады.

(2.2) теңдеуді канондық түрге, яғни интегралданатын түрге келтіру үшін келесі түрде тәсілдер жасалынады. Ең алдымен (x, y) айнымалыларынан тәуелді $u(x, y)$ функциясынан (ξ, η) айнымалыларына тәуелді $u(\xi, \eta)$ функциясына өту арқылы канондық түрге келеді, мұндағы

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Олай болса, (2.2) теңдеуде жоғары ретті туындысы бар қосылғыштардан келесі өрнекті алуға болады

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = 0.$$

Олай болса, (2.2) теңдеуге сәйкес сипаттауыш теңдеу келесі түрде болады

$$A(dy)^2 - 2B dx dy + C(dx)^2 = 0. \quad (2.3)$$

Бұл теңдеу *сипаттауыш теңдеуі* деп аталады. Осы сипаттауыш теңдеуі арқылы берілген теңдеудің типін анықтауға болады. Егер сипаттауыш теңдеудің түбірлеріне байланысты келесі түрде типтері анықталады:

- комплекс мәнді түбірлері болса, онда эллиптикалық типті;
- еселі нақты мәнді түбірлері болса, онда параболалық типті;
- әр түрлі нақты мәнді түбірлері болса, онда гиперболалық типті.

Енді (2.3) теңдеуді dx^2 -ке бөліп аламыз (яғни $dx \neq 0$ деп алайық):

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0.$$

Бұл $p = \frac{dy}{dx}$ белгілеуі арқылы p бойынша квадраттық теңдеу:

$$Ap^2 - 2Bp + C = 0. \quad (2.4)$$

(2.4) теңдеуді p бойынша шешеміз:

$$p = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Яғни,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (2.5)$$

(2.5) өрнекті интегралдау арқылы $y(x)$ функциясы табылады:

$$dy = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} dx.$$

Сондықтан

$$\boxed{y = \int \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} dx + C_1, \quad y = \int \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} dx + C_2.} \quad (2.6)$$

Бұл теңдеудің екі интегралдық шешімі бар, олар $+$ және $-$ таңбаларына сәйкес келеді.

Енді (x, y) айнымалыларынан тәуелді $u(x, y)$ функциясынан (ξ, η) айнымалыларына тәуелді $u(\xi, \eta)$ функцияға өткеннен кейін Δ дискриминантқа сәйкес канондық түрлері келесідей болады

2.1 Гиперболалық тип ($\Delta > 0$)

Егер $B^2 - AC > 0$ болса, онда теңдеуді түрлендіріп былай жазуға болады:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Классикалық мысал:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

2.2 Параболалық тип ($\Delta = 0$)

Егер $B^2 - AC = 0$ болса, канондық түрі:

$$u_{\xi\xi} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Мысалы:

$$u_t - k u_{xx} = 0.$$

2.3 Эллиптикалық тип ($\Delta < 0$)

Егер $B^2 - AC < 0$, онда канондық түр:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Мысалы:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

3 Мысал

Теңдеу берілсін:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

Мұнда $A = 1, B = 2, C = 3$. Дискриминант:

$$\Delta = B^2 - AC = 4 - 3 = 1 > 0.$$

Демек, теңдеу **гиперболалық типке** жатады. Жаңа координаталар енгізейік:

$$\xi = y + x, \quad \eta = y + 3x.$$

Бұл жағдайда теңдеу $u_{\xi\eta} = 0$ түріне келеді.

4 Әдебиеттер тізімі

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 4
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 4
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 4
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 4
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 4
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 4
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 4